



TITLE:

# DerivationとPoint Derivationについて (Function Space研究会報告集)

AUTHOR(S):

神保, 敏弥

---

CITATION:

神保, 敏弥. DerivationとPoint Derivationについて (Function Space研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1970, 96: 1-13

ISSUE DATE:

1970-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/108183>

RIGHT:

## Derivation と point derivation

について

東教大・理 神保敏弥

### § 1. 序

Topological algebra 上の微分と点微分についての主な問題は、次の事を調べることである：

- ① 0 でない (有界) 微分や (有界) 点微分が, それぞれ存在するための必要十分条件,
- ② 微分又は点微分が, それぞれ有界微分や有界点微分となるための必要十分条件.

①, ② について, Banach algebra や有理関数の algebra  $R(X)$  に対して, 多くの興味ある結果が得られている.

さらに, Banach algebra から順次他の topological algebra への拡張が, 試みられている. ここでの目的は, これらを簡潔に紹介することである.

## § 2. 定義と記号

定義 1.  $A$  : topological algebra

$\Leftrightarrow A$  : ① 複素線形位相空間, ② 単位元をもつ可換多元環  
③ 双線形写像  $(x, y) \rightarrow xy$  が, 各個連続.

$A, B$  を topological algebras とするとき,

$H(A, B) \equiv \{h \mid h \text{ は } A \text{ から } B \text{ の上への algebra 準同形}\},$

$H_c(A, B) \equiv \{h \in H(A, B) \mid h \text{ は連続}\}$  とする.

$S(A) \equiv H(A, \mathbb{C})$  は,  $A$  の spectrum と言う.  $S_c(A) \equiv H_c(A, \mathbb{C})$

$M_A$  :  $A$  の maximal ideals の space .

$\text{rad}(A)$  :  $A$  のすべての maximal ideals の 共通部分.

$A^{-1}$  :  $A$  の可逆元の集合.  $x \in A, h \in S(A)$  に対して,

$\hat{x}(h) \equiv h(x)$  で  $\hat{x}$  を定める.  $\hat{A} \equiv \{\hat{x} \mid x \in A\}.$

$S(A)$  の位相は, Gelfand 位相とする.

$X$  を位相空間とするとき,

$F(X)$  :  $X$  上のすべての複素数値関数の algebra,

$B(X)$  :  $X$  上のすべての複素数値有界関数の algebra,

$C(X)$  :  $X$  上のすべての複素数値連続関数の algebra.

$X$  を複素平面  $\mathbb{C}$  の compact set とするとき,

$R(X)$  :  $X$  上に極を持たぬすべての有理関数の algebra  $R_0(X)$  の

$X$  上の uniform closure,

$A(X)$  :  $X$  上で連続,  $X^\circ$  上で analytic なすべての関数の algebra.

定義2.  $B' \subset B$ ,  $h \in H(A, B')$  に対して, 写像

$D: A \rightarrow B$  が  $h$ -微分  $\iff D: \textcircled{1}$  線形写像,

$$\textcircled{2} \quad D(xy) = h(x)Dy + h(y)Dx, \quad \forall x, y \in A.$$

写像  $D: A \rightarrow B$  が  $h$ -連続微分

$\iff D: \textcircled{1} \quad h$ -微分,  $\textcircled{2}$  連続.

線形写像  $D$  が有界のときは,  $h$ -有界微分 ともいう.

$$\mathcal{D}(A, B, h) \equiv \{D \mid D \text{ は } h\text{-微分}\}$$

$$\mathcal{D}_c(A, B, h) \equiv \{D \mid D \text{ は } h\text{-連続微分}\}.$$

$h$  が, 恒等写像  $\text{id}$  や Gelfand map  $\wedge$  のとき,  $\mathcal{D}(A, A, \text{id})$ ,  $\mathcal{D}(A, B, \wedge)^{\dagger)}$  の元を単に 微分 といい,  $\mathcal{D}(A, A)$ ,  $\mathcal{D}(A, B)$  とそれぞれかく. 同様に連続のとき, 単に 連続 (又は 有界微分) といい,  $\mathcal{D}_c(A, A)$ ,  $\mathcal{D}_c(A, B)$  とかく.

特に,  $h \in S(A)$ ,  $B = \mathbb{C}$  のとき,  $\mathcal{D}(A, \mathbb{C}, h)$  の元を  $h$ での点微分,  $\mathcal{D}_c(A, \mathbb{C}, h)$  の元を,  $h$ での連続(又は有界)点微分 いう.  $\dagger)$  ここでは  $B \supset \hat{A}$  とする.

### §3. 微分

定理1. (Singer & Wermer [1])  $A$ : 可換 Banach algebra.

$$D \in \mathcal{D}_c(A, A) \Rightarrow D(A) \subset \text{rad}(A).$$

特に,  $A$ : semi-simple  $\Rightarrow D = 0$ .

証明.  $\phi \in S(A)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $x \in A$  に対して,  $\gamma_\lambda(x) \equiv \phi(e^{\lambda \phi}(x))$  とおくと,  $\gamma_\lambda \in S(A) = S_c(A)$  から, 関数論の Liouville の定理を

用いて,  $\phi(Dx)=0$ .  $\therefore Dx \in \text{rad}(A)$ .

系1. (Šilov) 区間  $[a, b]$  上での無限階微分可能なすべての複素数値関数の algebra  $C^\infty[a, b]$  を Banach algebra とする norm は, 存在しない.

系2. 定理1の結論は,  $\mathcal{L}$  が同形連続ならば,  $\mathcal{L}$ -有界微分でも成立する.

次の定理は, 微分が, 有界微分と有限個の非有界点微分の和であることを, 示している.

定理2. (Curtis [5]).  $A$ : 単位元をもち regular, 可換, semi-simple Banach algebra.  $D \in \mathcal{D}(A, B(S(A)))$ .

$\implies$  次の条件を満たす有限集合  $E \subset S(A)$  と  $D_1 \in \mathcal{D}_c(A, B(S(A)))$  が存在する: ①  $D_2 \equiv D - D_1$  とすると,  $D_2 x(\phi) = 0, \forall x \in A, \phi \in S(A) - E$ , ②  $\phi \in E$  に対しては,  $f_\phi(x) \equiv D_2 x(\phi)$  は, 非有界点微分である.

証明. 次の Bade と Curtis [3] の結果が有効な手段である:

『  $\|\cdot\|_1$ :  $A$  を normed algebra とする一つの norm

$\mathcal{G} \equiv \{G \subset S(A) \mid G \text{ は open, } \text{car}(\hat{x}) \subset G \text{ なるすべての } x \in A \text{ に対して, } \|x\|_1 \leq M_G \|x\| \text{ なる定数 } M_G \text{ が, 存在する} \}$

$\implies$  次の 1), 2) を満たす有限集合  $F$  が存在する: 1)  $G$  が open,  $\overline{G} \cap F = \emptyset \implies G \in \mathcal{G}$ , 2)  $G \in \mathcal{G} \implies G \cap F = \emptyset$ .

さて、今  $\|x\|_1 \equiv \|x\| + \|Dx\|_\infty$ , ここで  $\|\cdot\|_\infty$  は sup-norm とする.  $E \equiv F$ .  $\phi \in E$  に対し,  $f_\phi(x) \equiv Dx(\phi)$  は, uniform boundedness の原理を用いて, 有界線形関数であることがわかる.  $E \neq \emptyset$ ,  $D$  が非有界のとき  $D_1 x(\phi) \equiv Dx(\phi)$ ,  $\forall \phi \in E$ ,  $\equiv 0$ ,  $\forall \phi \in E$ , で  $D_1$  を定めると, 有界となり  $D_2 \equiv D - D_1$ . 系 [5].  $A$  は定理 2 と同じ  $\Rightarrow \mathcal{B}(A, C(S(A))) \equiv \mathcal{B}_c(A, C(S(A)))$ .

次の定理は, 下記の topological algebra  $\mathcal{A}$  においては, 定理 2 の regularity の条件が, 不要な事を示している.

$\mathcal{A}$ : ① 複素数体  $\mathbb{C}$  上の可換 algebra, ② 距離づけ可能な完備局所凸位相空間, ③ 乗法が連続, ④ 単位元 (1 とかく) を含む, ⑤  $\mathcal{A}^{-1}$  は 1 の近傍, ⑥, ② と ⑤ については,  $\mathcal{A}$  の位相は semi-norm の列  $\{\|\cdot\|_i\}$  によって与えられ,  $\|x-1\|_1 < 1$ ,  $x \in \mathcal{A} \longrightarrow x \in \mathcal{A}^{-1}$  とする.

$\Phi \equiv \{ \phi \in S(\mathcal{A}) \mid |\phi(x)| \leq \|x\|_1, \forall x \in \mathcal{A} \}$ .

定理 3. (Johnson [9])  $\mathcal{A}$  と  $\Phi$  は上記のものとする.

$\Phi$  は  $\mathcal{A}$  の点を分離  $\Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}) = \mathcal{B}_c(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})$ .

証明. 次の Lemma [9] が有効である: 『 $D \in \mathcal{B}(\mathcal{A}, F(\Phi))$ , 無限個の  $\phi_1, \phi_2, \dots \in \Phi$  に対して  $x \rightarrow Dx(\phi)$  が不連続  $\Rightarrow Dx \notin B(\Phi)$  となる  $x \in \mathcal{A}$  が存在する』。さて  $Dx \in B(\Phi)$  より  $x \rightarrow Dx(\phi)$  は,  $\phi \neq \phi_1, \dots, \phi_n$  で有界. 計算で,  $\phi_1, \dots, \phi_n$  でも有界となり, closed graph theorem

を用いて,  $D$  は連続となる.

定理 4. (Johnson [9]).  $A$ : 単位元をもつ可換 Banach algebra.  $C(S(A))$  は, 点別収束より強い局所凸距離づけ可能な位相をもつ.  $D \in \mathcal{D}(A, C(S(A)))$ .

$\Rightarrow$  次の条件を満たす直交中等元  $e_0, e_1, \dots, e_n \in A$  が存在する: 1)  $e_0 + \dots + e_n = 1$ , 2)  $D|_{e_0 A}$  は連続, 3) 各 algebra  $e_i A$ ,  $i=1, \dots, n$ , は一意の maximal ideal をもつ.

証明. 前の Lemma より,  $\alpha \rightarrow D\alpha(\phi)$  の不連続な点を,  $\phi_1, \dots, \phi_n \in L$ , この中での孤立点を,  $\psi_1, \dots, \psi_R$  とすると, Šilov の定理から,  $\exists e_i \in A$  で  $\psi_i(e_i) = 1, \phi(e_i) = 0, \forall \phi \neq \psi_i$ .  $e_i e_j = 0$  ( $i \neq j$ ) となるので, 1) は  $e_0 \equiv 1 - (e_1 + \dots + e_R)$  とすればよい. 2) は,  $e_0 A \ni x_i \rightarrow 0, Dx_i \rightarrow y \Rightarrow y = 0$  を  $De_i = 0$  と  $y$  の連続性によって言い, 故に closed graph theorem よりわかる. 3) は, 明らか.

#### § 4. 点微分

Banach algebra の場合, 次の定理は, 点微分存在の必要十分条件として, よく知られている. 証明は, Hahn-Banach の定理を用いる.

定理 5.  $A$ : 単位元をもつ可換 Banach algebra,  $\phi \in S(A)$  とすると,

$$\mathcal{D}(A, \mathbb{C}, \phi) \neq \{0\} \iff \ker \phi \neq (\ker \phi)^2$$

$$\mathcal{D}_c(A, \mathbb{C}, \phi) \neq \{0\} \iff \ker \phi \neq \overline{(\ker \phi)^2}.$$

さて, function algebra について考える.

$A$ :  $X$  上の function algebra.

$x \in X$  に対して,  $\phi_x(f) \equiv f(x), \forall f \in A$ .

$X$  に, metric topology を  $\|x - y\| \equiv \|\phi_x - \phi_y\|$  で入れる.

次の定理は, 単位元をもつ Banach algebra のときも, 成立するが, 定理の逆は, 正しくない.

定理 6. (Browder [12])  $A$ :  $X$  上の function algebra  
 $x \in X$  は, 上の metric topology で, 孤立点でない.

$$\implies \mathcal{D}(A, \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\}$$

証明. 対偶を示す.  $\ker \phi_x = (\ker \phi_x)^2$  とする.

$K \equiv \{ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i g_i \mid f_i, g_i \in \ker \phi_x, n \text{ は任意正整数},$

$$\lambda_i \in \mathbb{C}, \|f_i\| = \|g_i\| = 1, \sum |\lambda_i| \leq 1 \}.$$

$\ker \phi_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} nK$  より, Baire category theorem を用い

て,  $K$  が,  $0$  の近傍となるので,  $\psi \in M^*$  に対して,  $C \|\psi\|$

$\leq \sup \{ |\psi(f)| : f \in K \}$  なる  $C > 0$  が, 存在する.  $\psi$  が,

かつ乗法的,  $\neq 0$  ならば  $\|\psi\| \geq C$  となる. 特に, ある  $y \in X$

に対して,  $\psi = \phi_y$  かつ  $x \neq y$  ならば  $\|\psi\| \leq \|x - y\|$  より

$$\|x - y\| \geq C.$$

次の定理は,  $x \in X$  が peak sets の共通部分でもよい.



定理7. (cf [12], [16])  $A: X$  上の function algebra  
 $x \in X: \text{peak point} \Rightarrow \mathcal{D}(A, \mathbb{C}, \phi_x) = \{0\}$ .

証明.  $\ker \phi_x$  は approximate identity をもつので,  
 Cohen の分解定理 [10] から,  $\ker \phi_x = (\ker \phi_x)^2$  となる.

又, 単位元をもつ可換 Banach algebra  $A$  の  $\ker \phi$  が,  
 approximate identity をもつならば,  $\mathcal{D}(A, \mathbb{C}, \phi) = \{0\}$ .

さて, Gleason part との関連をみる.

Wermer は Dirichlet algebra, Hoffman は log-modular algebra, さらに Lumer は function algebra で  $\phi \in S(A)$  が unique representing measure<sup>†)</sup> をもつとき, それぞれ  $\phi$  を含む Gleason part は,  $\phi$  のみが,  $\phi$  での analytic disc からなることを示した.

Sidney は, これに有界点微分を結びつけた.

†)  $P_\phi \equiv \{ \psi \in S(A) \mid \|\psi - \phi\| < 2 \}$ .

定理8. (Sidney)  $A: X$  上の function algebra  
 $\phi \in S(A)$  は unique representing measure をもつ.

$\Rightarrow$  1)  $P_\phi = \{ \phi \}$ , あるいは, 2) 次の条件を満たす単位開円板から  $P_\phi$  (metric topology は  $A^*$  で...) の上への位相同形な写像  $\pi$  が存在する:  $\varphi \circ \pi$  ( $\forall f \in A$ ) が正則,  $\pi(0) = \phi$ .  
 そして 1) のとき,  $\ker \phi = \overline{(\ker \phi)^2}$ ,  
 2) のとき,  $\overline{(\ker \phi)^n} / \overline{(\ker \phi)^{n+1}}$  は一次元である,  $n \geq 0$ .

次に  $R(X)$  についての点微分を考える.

定理9. (Browder [12])  $x \in X$ .

$\mathcal{D}(R(X), \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\} \iff x$  は  $R(X)$  の Choque 境界点でない.

証明. 定理6と「norm topologyで孤立点は Choque 境界点である」と [11]の定理から得られる.

系. [12]  $R(X) = C(X) \iff \mathcal{D}(R(X), \mathbb{C}, \phi_x) = \{0\}, \forall x \in X$ .

Swiss cheeseに関しては,  $R(X) \neq C(X)$ で, 0でない有界点微をもたぬ  $R(X)$  の例として, Wermer [13]は, ある Swiss cheeseを作った. 点微分存在の十分条件は 次のものである.

定理10. (Browder)  $X$ : 中心  $a_i$ , 半径  $r_i$  の開円板  $D_i, i=1, 2, \dots$  を取り除いた Swiss cheese.  $z \in X, z \notin \partial D_i$ ,  $i=1, 2, \dots, |z| \neq 1$ , 
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{|z - a_i|^2} < \infty$$

$\implies \mathcal{D}_c(R(X), \mathbb{C}, \phi_z) \neq \{0\}$ .

証明 「 $\mathcal{D}_c(R(X), \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\} \iff \exists k$  (定数) で  $|f'(x)| \leq k \cdot \|f\|, \forall f \in R_c(X)$  となる」 であるので, Cauchy の公式を用いて  $f'(x)$  を評価すればよい.

さて analytic capacity を用いて  $R(X)$  の有界点微分の存在の必要十分条件を表わせる. 次の定理は Melnikov の結果の analogue のことである.

$S^2$ : Riemann sphere

$$\Delta(x, r) \equiv \{ z \in \mathbb{C} : |z - x| \leq r \}$$

$$A_n(x) \equiv \{ z \in \mathbb{C} : 1/2^{n+1} \leq |z - x| \leq 1/2^n \}$$

$U \subset \mathbb{C}$  : 有界平面集合

$\mathcal{H}(U)$  : 次の条件を満たす関数全体 :  $U$  のある compact subset 以外で analytic, 絶対値 1 以下,  $\infty$  で 0 をとる.

$$\mathcal{O}(U) \equiv \{ f \in \mathcal{H}(U) \cap C(S^2) \mid \|f\| \leq 1 \}$$

$$\gamma(U) \equiv \sup \{ |f'(\infty)| : f \in \mathcal{H}(U) \}$$

$$\alpha(U) \equiv \sup \{ |f'(\infty)| : f \in \mathcal{O}(U) \}, \text{ ここで } f'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z). \quad \gamma(U), \alpha(U) \text{ をそれぞれ analytic capacity, continuous analytic capacity とする.}$$

定理 11. (Hallstrom [15])  $x \in X$ ,

$$\mathcal{O}_c(R(X), \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \gamma(A_n(x) \setminus X) < \infty,$$

$$\mathcal{O}_c(A(X), \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \alpha(A_n(x) \setminus X^\circ) < \infty.$$

証明. 略.

次の定理は,  $R(X)$  の order  $n$  の有界点微分の存在するための必要十分条件で analytic capacity を用いての結果は [15] にみられる.

正整数  $n$  に対して,  $x \in X$  での  $R(X)$  上の order  $n$  の有界点微分が存在するとは, 次のときを言う:

$\forall f \in R_0(X)$  に対して,  $|f^{(n)}(x)| \leq \text{const} \|f\|$  なる定数  $\text{const}$  が存在する.

定理 12. (Wilken [17])  $x \in X$  で order  $n \geq 1$  の  $R(X)$  上の 0 でない有界点微分が存在する  $\iff$  次の条件を満たす (complex) representing measure  $\mu_x$  が, 存在する:

$$\int d|\mu_x|(z) / |z - x|^n < \infty$$

### 参 考 文 献

Derivation ;

- [1] Singer I. M. and J. Wermer, Derivations on commutative normed algebras, 129 (1955), 260 - 264.
- [2] Kaplansky I., Derivations of Banach algebras, in Seminars on analytic functions, Vol 2, Princeton Univ Press, 1958.
- [3] Bade W. G. and P. C. Curtis, Jr., Homomorphisms of commutative Banach algebras, Amer. J. Math. 82 (1960), 589 - 608.
- [4] Rickart C. E. General Theory of Banach algebras, Van Nostrand, New York, 1960.
- [5] Curtis P. C., Jr., Derivations of commutative Banach algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961),

271-273

- [6] Rosenfeld M. Commutative  $F$ -algebras, *Pacif. J. Math.* 16(1966), 159-166.
- [7] Johnson E. and A.M. Singer, Continuity of derivations and a problem of Kaplansky, *Amer. J. Math.* 90(1968), 1067-1073.
- [8] Sinclair A.M. Continuous derivations on Banach algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* 20(1969), 166-170.
- [9] Johnson B.E. Continuity of derivations on commutative algebras, *Amer. J. Math.* 91(1969), 1-10.
- Point derivation ;
- [10] Cohen P.J. Factorization in group algebras, *Duke Math. J.* 26(1959), 199-206.
- [11] Curtis P.C., Jr and Figá-Talamanca, A. Factorization theorems for Banach algebras, in "Function Algebras", pp 169-185. Scott Foreman, 1966.
- [12] Browder A. Point derivations on function algebras, *J. Functional analysis* 1(1967), 22-27.

- [3] Wermer J., Bounded point derivations on certain Banach algebras, J. Functional Analysis, 1 (1967) 28-36.
- [4] Sidney S. J., Point derivations in certain sup-norm algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 131 (1968) 119-127.
- [5] Hallstrom A.P., On bounded point derivations and analytic capacity, J. Functional Analysis 4 (1969), 153-165.
- [6] Browder A., Introduction to Function Algebras, WA. Benjamin, INC, 1969, 63-78.
- [7] Wilken D.R., Bounded point derivations and representing measures on  $R(X)$ , Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 371-373.